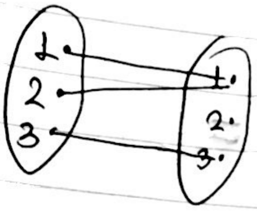
Αλγεβρικές Δομές

20/04/16

Παρατήρηση: $\varphi : G \to G$ και $H \leq G$ ώστε $\mathrm{Ker}\varphi \leq H$



$$f^{-1}(f(1)) = \{1,2\} \supseteq \{1\}$$

$$\varphi^{-1}\varphi(H) \supseteq H \text{ Σίγουρα}$$
$$\subseteq \ ;;;$$

$x \in \varphi^{-1}\varphi(H) \Rightarrow \varphi(x) \in \varphi(H) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, h \in H$ ώστε $\varphi(x) = \varphi(h) \Rightarrow \varphi(x)\varphi(h^{-1}) = 1_G \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x \cdot h^{-1}) = 1_G \Rightarrow x h^{-1} \in \mathrm{Ker}\varphi \leq H$
Άρα $x h^{-1} \in H$ και $h \in H \Rightarrow x \in H$.

Επειδή:

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ker}\varphi \leq H \\ \text{και } \varphi^{-1}\cdot\varphi(H) \supseteq H \\ \qquad\qquad\quad \subseteq ;;; \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi^{-1}\varphi(H) = H$ όταν η υποομάδα περιέχει του πυρήνα

6) $\varphi : G_1 \to G_2$ επιμορφισμός
a) Αν G_1, κυκλική $\Rightarrow$ G_2, κυκλική

Θεωρία: $\varphi : G_1 \to G_2$ επι
{υποομάδες της G_1 $\xleftrightarrow{1-1}$ υποομάδες της G_2 που περιέχουν του πυρήνα.
$\varphi^{-1}(A)$ κανονική $\longleftarrow\!\!|$ κανονική: A
B κανονική $\longmapsto$ $\varphi(B)$ κανονική

$G_1 = \langle a \rangle$, $\langle \varphi(a) \rangle \leq G_2$
$= G_2$

Εστω g τυχαιο στη G_2
φ επι $\Rightarrow \exists\, b \in G_1$ με $\varphi(b) = g$,

$b \in \langle a \rangle \Rightarrow b = a^k$ για καποιο k
$g = \varphi(b) = \varphi(a^k) = (\varphi(a))^k$

β) $\varphi : G_1 \twoheadrightarrow G_2 = \langle a \rangle$
οχι

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \overset{\text{επι}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}_4$ κυκλικη
$(a, b) \longmapsto b$
οχι κυκλικη

γ) $\varphi : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_3$ $\varphi \in Hom(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3)$
$1 \longmapsto \varphi(1)$

$$\left.\begin{array}{l} O(\varphi(1)) / O(1) = 4 \Rightarrow O(\varphi(1)) = 1, 2, 4 \\ O(\varphi(1)) \mid 3 \Rightarrow O\varphi(1) = 1, 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow O(\varphi(1)) = 1 \Rightarrow \varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi$ τετριμμενος ομομορ. $Hom(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_3) = \langle 0 \rangle$.

<u>Θεωρία</u>:
Ακεραια περιοχη R = δακτυλιος, αντιμεταθετικος μοναδιαιος, οχι μηδενοδιαιρετες

<u>Προταση</u>:
Μια πεπερασμενη ακεραια περιοχη ειναι σωμα.

Αποδειξη :

$R = \{r_1, \dots, r_k\}$ πρεπει αν $r \neq 0 \Rightarrow r^{-1} \in R$

Τυχαιο $r_i \in R \Rightarrow r_i R = \{r_i r_1, \dots, r_i r_k\} \subseteq R$

Θα είχαμε $r_i R \neq R$, άν $r_i r_j = r_i r_t \Rightarrow$

$\Rightarrow r_i(r_j r_t) = 0 \Rightarrow r_j - r_t = 0 \Rightarrow r_j = r_t$

$\Rightarrow r_i R = R$

Επειδη $1 \in R = r_i R \Rightarrow \exists j : r_i r_j = 1 \Rightarrow r_j = r_i^{-1}$

Υποδακτυλιος :

Ορισμος :
Ενα υποσυνολο S ενος δακτυλιου R θα καλειται υποδακτυλιος αν το S με τις ιδιες πραξεις αποτελει δακτυλιο. Γραφουμε $S \leq R$

Π.χ :

$R = \mathbb{Z}$: S = υποομαδα του $\mathbb{Z}$

$S = k\mathbb{Z}$ ειναι και δακτυλιος ;;;

Πρεπει $(S, \cdot)$ καλα ορισμενο $kn \, km = k\ell =$

$= k(knm)$

Προσεταιριστικη κληρονομειται απο το $\mathbb{Z}$

αρα $k \cdot \mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ ολοι οι υποδακτυλιοι.

οχι μοναδιαιος

μοναδιαιος.

Π.Χ :

$R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \oplus \{0\} \leq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, μοναδιαίο το $(1,1)$ και

το $(1,0)$ με $(1,0) \neq (1,1)$

Πρόταση :

Έστω $S \subseteq R$ δακτύλιος. Το S θα είναι υποδακτύλιος

$S \leq R$ αν-ν $r_1 - r_2 \in S$ και $r_1 \cdot r_2 \in S \; \forall r_1, r_2 \in S$

Απόδειξη :

("$\Rightarrow$"): Αν $S \leq R \Rightarrow$ ισχύουν.

("$\Leftarrow$"): $r_1 - r_2 \in S \Longleftrightarrow S \leq R$ υποομάδα προσθετική

$r_1 \cdot r_2 \in S$ η πράξη είναι καλά ορισμένη.

και η προσεταιριστική γιατί ισχύει στο R

και η επιμεριστική ισχύει γιατί ισχύει στο R

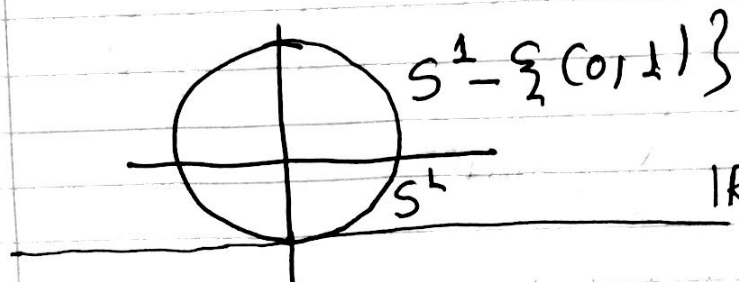
Παράδειγμα :

$S^1 \leq \mathbb{C}^* : S^1 = \{(a + bi \mid a^2 + b^2 = 1\}$

$S^1 = \{e^{i2\pi t} \mid 0 \leq t \leq 1\}$

$S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} : S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$

$S^1 - \{(0,1)\} = \mathbb{R}$



Υποομαδες $\leq$ Ομαδα

Κανονικη υποομαδα $\boxed{\triangleleft}$ $O \Rightarrow O/_K$ ομαδα πηλικο

κανονικη υποομαδα σημαινει αυτό.

Οριζεται δακτυλιος πηλικο:

$S \leq R \Rightarrow R/S$ πηλικο.

Για να ορισθει πρεπει $S \triangleleft R$ ιδεωδες.

<u>Ορισμος</u>:

Εστω S υποδακτυλιος του δακτυλιου R. Αν ισχυει: $\forall r \in R$ και $s \in S \Rightarrow rs$ και $sr \in S$ τοτε το S θα καλειται <u>ιδεωδες</u>: $S \triangleleft R$

Π.Χ:

$k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ ειναι ιδεωδη;;;

Για να ειναι πρεπει $\forall m \in \mathbb{Z}$ και $k\ell \in k\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow mk\ell \in k\mathbb{Z}$ ισχυει

(αρα καθε υποδακτυλιος του $\mathbb{Z}$ ειναι ιδεώδη)

<u>Π.Χ</u>:

$\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ ειναι ιδεωδη;;;

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ και $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{p}{q} m \in \mathbb{Z}$. ΟΧι παντα.

αρα $\mathbb{Z} \ntriangleleft \mathbb{Q}$ (δεν ειναι ιδεωδη).

<u>Θεωρία</u>:

Εστω $S \leq R$. Οριζουμε το συνολο των συμπλοκων ως προς S. $\{s+r \mid r \in \mathbb{R}\}$. Οριζουμε πραξεις $(S,+)$ αβελιανη $\leq (\mathbb{R},+)$ Οριζεται η προσθεση

οπως στις ομαδες $(S+r_1)+(S+r_2) = S+(r_1+r_2)$
καλα ορισμενη απο το "$\leq$"

Οριζουμε επισης γινομενο στα συμπλοκα

$$(S+r_1)(S+r_2) = S + r_1 \cdot r_2$$

$$S \cdot A + r_1 A = S(S+r_2) + r_1(S+r_2) =$$

$$= S \cdot \cancel{S} + \underbrace{Sr_2}_{=S} + \underbrace{r_1 S}_{= S \text{ οταν } S \triangleleft R} + r_1 \cdot r_2$$

$$S \cdot S = S$$

Πρεπει νδο η πραξη ειναι καλα ορισμενη.

(<u>Η συνεχεια στο επομενο λογω αξιολογησης...</u>)